Ongelijkheden voor groot en klein

Peter Vandendriessche
peter.vand-endriessc-he@gma-il.com
(zonder die liggende streepjes)

startdatum: 12 juni 2004
laatste bewerking: 6 april 2006

Ondersteunend forum op http://www.problem-solving.be/index.php?f=231

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Inleiding

Ongelijkheden

Iedereen weet waarschijnlijk wel wat een vergelijking is: je hebt een linkerlid en een rechterlid, en je weet dat die twee gelijk zijn. Ongelijkheden zijn in feite hetzelfde, behalve dat je niet weet dat $A = B$, maar dat bijvoorbeeld $A \geq B$ of $A > B$. Hierrond kun je net als bij vergelijkingen een ganse theorie opbouwen. Je bent hiermee in het secundair wellicht al gestart: als $x > y > 0$ dan is $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$, het teken keert daar dus om, omdat $\frac{1}{x}$ een dalende functie is. Dit soort dingen wordt van je verwacht als voorkennis.

Ongelijkheden vinden in talloze gebieden hun toepassing: in de analyse, statistiek, combinatieleer, meetkunde, benaderingstheorie... Het zal je dan ook niet verwonderen, dat deze ook in grote wiskundecompetities zoals de IMO een erg populair onderwerp zijn. Het type ongelijkheden dat op IMO voorkomt zijn doorgaans de algebraïsche ongelijkheden, dat wil zeggen dat er doorgaans een bepaalde structuur en symmetrie achter de ongelijkheden schuilt, en dat ze best kunnen opgelost worden door inzicht te krijgen in die diepere structuur. De zoektocht naar die structuur vormt de bouwsteen van deze cursus.

1.1 Triviale ongelijkheid

We beginnen met de eenvoudigste ongelijkheid:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$$

Ongelijkheden van deze moeilijkheidsgraad moeten we niet oplossen of bewijzen (je ziet het 'bewijs' op het zicht), we noemen ze dan ook 'triviaal'. Sommige ongelijkheden kunnen zonder veel moeite omgevormd worden tot triviale ongelijkheden.

Voorbeeld. *(JWO 2002) Bewijs dat:*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$$

Oplossing. *Alles op gelijke noemer zetten geeft* $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2ac + 2bc - 2ab$ *wat te schrijven is als* $(a+b-c)^2 \geq 0$*, en dus triviaal genoemd mag worden. De voorwaarde voor gelijkheid is hier dan ook eenvoudig:* $a + b - c = 0$ □

Voorbeeld. $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt{1+2x} \leq 1 + x$

Bewijs zelf als oefening.

Voorbeeld. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 \geq 2ab$

Bewijs zelf als oefening.

Een dergelijk probleem ga je uiteraard nooit krijgen op een moeilijke wiskundecompetitie zoals IMO. Maar dat dit soort ongelijkheden *altijd* makkelijk is, is ook niet juist. Vaak eist dit soort vragen een grote creativiteit. Het is dan ook belangrijk je niet blind te staren op de methodes in deze cursus: hoewel ze vaak van groot belang zijn, kunnen ze bij bepaalde problemen even goed compleet nutteloos zijn. Enkele voorbeelden om in de sfeer te komen.

Voorbeeld. *(IMC 1999) Gegeven reële getallen* $x_1, ..., x_n > -1$*, met* $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = 0$*. Bewijs dat:*

$$x_1 + ... + x_n \leq \frac{n}{3}$$

Oplossing. *Het antwoord zal eenvoudig lijken, maar bleek op deze internationale competitie toch een zeer slecht beantwoorde vraag te zijn. De truc is nochtans simpel: beschouw volgende veelterm en zijn factorisatie:*

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Voor $x = x_i$ *is dit positief, aangezien* $x_i > -1$*. Tellen we dit nu op voor alle* x_i *dan komt er*

$$(x_1^3 + ... + x_n^3) - \frac{3}{4}(x_1 + ... + x_n) + \frac{n}{4} \geq 0$$

$$\frac{3}{4}(x_1 + ... + x_n) \leq \frac{n}{4}$$

Na deling door $\frac{3}{4}$ *geeft dit het te bewijzen.* □

Weinig mensen hebben op de competitie het antwoord gevonden. De $x_i > -1$ kan je wel doen denken dat je ergens $(x+1) > 0$ nodig hebt. En die som van derdemachten suggereert het ook wel. Maar om dan echt op die veelterm te komen, dat is altijd wat puzzelen.

1.2 Spitsvondigheid

Voor sommige ongelijkheden heb je niet echt leerstof nodig, ze draaien gewoon om het vinden van het juiste idee. Het komt er dus vooral op aan op het juiste moment die briljante ingeving te krijgen, en ja, ook dat kun je trainen. Soms helpt kennis van handige formuletjes wel, zoals bijvoorbeeld $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ bij sommige combinatorische ongelijkheden. Of het wonder van de inductie bij ongelijkheden in natuurlijke getallen: je bewijst het voor n=1, je bewijst dat als het waar is voor n dan ook voor $n+1$, en zo volgt het dus voor alle getallen: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to ....$ Of een ander fenomeen dat vaak terug komt: “Bewijs dat $\exists k \in \mathbb{N}$ waarvoor...”, deze vragen gaan dan weer vaak met het duivenhokprincipe. Maar in veel gevallen zul je toch zelf een nieuwe truc moeten bedenken.

Voorbeeld. *(IMO 1974) Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}_0^+$, bepaal alle mogelijke waarden van*

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{c+d+b} + \frac{d}{d+a+c}.$$

Oplossing. *Enerzijds is het duidelijk dat*

$$S > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1$$

$$S < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2$$

Anderzijds kun je ook naar beide waarden willekeurig dicht naderen: we mogen a, b, c, d vrij kiezen dus kies je bijvoorbeeld $(a = x, b = \frac{1}{x}, c = \frac{1}{x^2}, d = \frac{1}{x})$, dan nader je naar 1 als x heel groot wordt en naar $+\infty$ nadert. Kies je daarna bijvoorbeeld $(a = x, b = \frac{1}{x}, c = x, d = \frac{1}{x})$ dan nader je naar 2 als x heel groot wordt en naar $+\infty$ nadert. En daar S continu is in zijn variabelen (geen sprongen maakt), worden ook alle tussenliggende waarden bereikt. Dus $S \in]1, 2[$. □

Men had ook kunnen schrijven: toon aan dat $1 \leq ... \leq 2$, en bewijs dat 1 niet door een grotere en 2 niet door een kleinere constante kunnen vervangen worden. Dit zou de waarden al een beetje weggeven (en het probleem dus makkelijker maken), maar inhoudelijk is de vraag identiek. Je ziet, feitelijk is daar niets moeilijks of geavanceerd aan, maar als je die eerste twee ongelijkheden niet ziet, kun je hier lang op zitten zoeken... Dus, laat ons eens wat gaan oefenen, en zien hoe goed je daarin bent.

Pas op: schrik niet als je vrij lang moet zoeken om zelfs maar één opgave te vinden. Deze opgaves zijn niet zoals in het secundair, waar je ze altijd meteen vindt en er honderd op een dag kan van maken. Het is uiteraard niet nodig alle oefeningen meteen te maken voor je verder gaat. De meeste oefeningen zullen (vooral in het begin) behoorlijk wat redeneerwerk vragen, de meeste studenten vinden hoofdstuk 1 dan ook het moeilijkst. Probeer de oefeningen steeds met zo weinig mogelijk rekenwerk te maken. Het komt er in de eerste plaats op aan om met het juiste idee voor de dag te komen.

1.3 Oefeningen

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

2. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \max(a, b) \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \geq \min(a, b)$

3. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \sqrt{a^2 + (1-b)^2} + \sqrt{b^2 + (1-c)^2} + \sqrt{c^2 + (1-a)^2} \geq \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

4. Zij $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 21 = a - 3b + 5c - 7d$. Vind de waarde van $16abcd$.

5. (ASU 1987) Definieer een rij als volgt: $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$. Bewijs dat $x_{100} > 14$.

6. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \sqrt{3}\,(x + y + z)$

7. (VWO 2002) Toon aan dat $\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

8. n knikkers starten in een horizontale wrijvingloze knikkerbaan, elk met een bepaalde snelheid naar links en naar rechts. Als 2 knikkers botsen, worden hun snelheden gewoon verwisseld. Hoeveel keer kunnen de knikkers maximaal botsen?

9. Bewijs dat voor iedere 13 verschillende reële getallen er twee bestaan (a, b) zodat
$$0 < \frac{a-b}{1+ab} \leq 2 - \sqrt{3}.$$

10. (IMO 1997) Zij $(x_1, .., x_n)$ een rijtje reële getallen met $x_1 + ... + x_n = 1, |x_i| \leq \frac{n+1}{2}$. Je mag de elementen x_i in een willekeurige volgorde zetten, zodat je een nieuwe rij bekomt en deze noem je $(y_1, ..., y_n)$. Toon aan dat je steeds zo'n rij kan vinden zodanig dat $|y_1 + 2y_2 + ... + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}$.

11. (VWO 1993) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : -1 < \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{1993} + \left(\dfrac{b-c}{b+c}\right)^{1993} + \left(\dfrac{c-a}{c+a}\right)^{1993} < 1$

12. *$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdots \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{3n}}$

13. *Zij $a_i > 0$ en $a_1 + ... + a_n = 1$. Bewijs dat
$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + ... + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$$

Maar het leven is niet altijd rozengeur en maneschijn, de meeste ongelijkheden zijn niet eenvoudig oplosbaar zonder enkele meer verfijnde methodes.

Hoofdstuk 2

Gemiddelden

2.1 Overzicht

Een functie van verschillende variabelen (getallen) noemen we algemeen *een gemiddelde* als en slechts als voldaan is aan volgende eigenschappen:

- de waarde van het gemiddelde is niet groter dan $\max(a_1, a_2, ..., a_n)$ en niet kleiner dan $\min(a_1, a_2, ..., a_n)$ (respectievelijk het grootste en het kleinste element uit de verzameling $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$),
- de volgorde van de variabelen speelt geen rol,
- als alle a_i gelijk zijn, dan is ook het gemiddelde gelijk aan die waarde.

Merk op dat het 'gewone' rekenkundig gemiddelde (in het Engels: Arithmetic Mean of AM) met die definitie ook een gemiddelde is. Er zijn er echter nog meer. De meest courante staan hieronder opgesomd. Merk op dat we doorgaans a_i positief onderstellen.

- AM: Rekenkundig Gemiddelde: $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ (dit ken je al)
- GM: Meetkundig Gemiddelde: $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$
- HM: Harmonisch Gemiddelde: $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$
- QM: Kwadratisch Gemiddelde: $\sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$
- $\max(a_1, a_2, ..., a_n)$ en $\min(a_1, a_2, ..., a_n)$

2.2 Stellingen

Wat doen die gemiddelden nu in een cursus ongelijkheden? Wel, het leuke aan die gemiddelden is dat er vrij krachtige ongelijkheden gelden tussen die gemiddelden. Ongetwijfeld een van de belangrijkste ongelijkheden die er zijn is de volgende:

Stelling. *(AM-GM) Voor $a_1, ..., a_n$ positieve reële getallen, geldt:*

$$AM(a_1, ..., a_n) \geq GM(a_1, ..., a_n)$$

Bewijs. *Een moeilijk, maar leuk bewijs. We gaan dus bewijzen dat:*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

1. Eerst gaan we bewijzen dat de ongelijkheid klopt voor $n = 2^k$. Bewijs: Voor $n = 2$ hadden we ze al bewezen in hoofdstuk 1. Dus krijgen we:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} &\geq \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \cdots + \sqrt{a_{2^k-1} a_{2^k}}}{2^{k-1}} \\ &\geq \frac{\sqrt[4]{a_1 ... a_4} + \cdots + \sqrt[4]{a_{2^k-3} ... a_{2^k}}}{2^{k-2}} \\ &\geq \cdots \\ &\geq \sqrt[2^k]{a_1 ... a_{2^k}} \end{aligned}$$

2. Nu gaan we bewijzen dat als de ongelijkheid geldt voor $n = k + 1$, ze dan ook zeker geldt voor $n = k$. Bewijs: stel $a_{k+1} = \sqrt[k]{a_1 ... a_k}$. We krijgen:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}}{k+1} &\geq \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_k \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}} \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} &\geq (k+1) \sqrt[k+1]{a_1^{\frac{k+1}{k}} \cdots a_k^{\frac{k+1}{k}}} \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} &\geq (k+1) \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_k &\geq k \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} \\ \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} &\geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} \end{aligned}$$

Nu hebben we het bewezen voor alle n, het is waar voor de kleinste macht van 2 groter dan n, en we kunnen neerwaarts afdalen, tot het waar is voor n. Bijvoorbeeld voor $n = 6$: $2 \to 4 \to 8 \to 7 \to 6$. □

Deze bewijsmethode heet terugkrabbel-inductie, en wordt niet alleen gebruikt in bewijsvoeringen, maar ook in vele andere wiskundige algoritmes, zoals de zoekmachine in Google.

Voorbeeld. $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ : \dfrac{a^2+2}{2} \geq \sqrt{a^3+1}$

Oplossing. *Deze is een beetje tricky. We hebben:*

$$\frac{a^2+2}{2} = \frac{(a^2-a+1)+(a+1)}{2} \geq \sqrt{(a^2-a+1)(a+1)} = \sqrt{a^3+1}.$$

$\square$

Stelling. *(GM-HM) Voor $a_1, ..., a_n$ positieve reële getallen, geldt:*

$$GM(a_1, ..., a_n) \geq HM(a_1, ..., a_n)$$

Bewijs. *Je kunt hier heel het vorige bewijs herhalen. Er is echter een korte manier om dit uit AM-GM te halen. Zie je hoe?*

Stelling. *(QM-AM) Voor $a_1, ..., a_n$ positieve reële getallen, geldt:*

$$QM(a_1, ..., a_n) \geq AM(a_1, ..., a_n)$$

Bewijs. *Kwadrateren we beide leden dan komt er na vereenvoudiging:*

$$n \cdot (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) \geq (a_1 + ... + a_n)^2$$

Schrijven we dit nu even in een vierkant, waarbij de som van alle getallen in het vierkant de betreffende uitdrukking geeft:

$$\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1^2 & \cdots & a_1^2 \\ a_2^2 & a_2^2 & \cdots & a_2^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^2 & a_n^2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

Beschouw nu het element in de j-de rij en i-de kolom, plus het element in i-de rij en j-de kolom. We krijgen telkens $a_i^2 + a_j^2 \geq 2a_ia_j$, dit toepassen op ieder koppel (i, j) en alles optellen geeft de te bewijzen ongelijkheid. We weten zo ook meteen dat er enkel gelijkheid optreedt als en slechts als alle a_k gelijk zijn. $\square$

Nog een ongelijkheid die zeer belangrijk is en die eigenlijk een simpele veralgemening is van QM-AM:

Stelling. *(Cauchy-Schwarz) Voor $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ positieve reële getallen, geldt:*

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2$$

Bewijs. *Een vrij analoog bewijs is mogelijk, probeer zelf eens.*

2.3 Een gouden raad

Je zult bij bijna iedere ongelijkheid in deze cursus zien staan wat de gelijkheidsvoorwaarde is. **Dat staat daar niet ter versiering.** Een goed inzicht in de ongelijkheden en hun gelijkheidsvoorwaarde is essentieel en kan ook erg veel tijd besparen. Het is aangeraden om altijd eens te beginnen met 'intuïtief' te kijken waar je gelijkheid zou kunnen verkrijgen, of waar een uitdrukking maximaal/minimaal is. Als je ziet dat er mogelijks gelijkheid kan optreden waarbij bijvoorbeeld $x = 1$, dan heeft het geen zin om iets te proberen met $x^2 + 4 \geq 4x$, want dit toepassen zou de gelijkheid in $x = 1$ niet behouden, en kan dus nooit of te nimmer een goede stap in je bewijs zijn. Verlies daar dan ook geen tijd mee, want tijd = punten op een competitie.

2.4 Opwarmertjes

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ : \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$
2. $\forall a_i \in \mathbb{R}_0^+ : \dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \cdots + \dfrac{a_n}{a_1} \geq n$
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+; n \in \mathbb{N}_0 : \sqrt[n+1]{ab^n} \leq \dfrac{a + nb}{n+1}$
4. (VWO 1986) $\forall n \in \mathbb{N} : n! \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$
5. $2005 > 3 \cdot \sqrt[3]{668^3 + 668^2}$
6. $\forall m, n \in \mathbb{N}_0; a, b \in \mathbb{R}_0^+ : a^{\frac{m}{m+n}} \cdot b^{\frac{n}{m+n}} \leq \dfrac{am + bn}{m+n}$
7. $\forall x, y \in \mathbb{R}_0^+ : \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$
8. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$
9. (IMO 1975) $\forall a_i \in \mathbb{R}_0^+ : (a_1 + a_2 + ... + a_n) \cdot \left(\dfrac{1}{a_i} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n}\right) \geq n^2$
10. (Ierland 1998) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \dfrac{9}{a+b+c} \leq 2\left(\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a}\right) \leq \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

2.5 Oefeningen

1. $\forall x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$

2. $\forall a_i \in \mathbb{R}_0^+, a_1a_2...a_n = 1 : (a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1) \geq 2^n$

3. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, a+b+c = 1 : ab+bc+ca \leq \dfrac{1}{3}$

4. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, a, b, c > 2 : (a^3+b)(b^3+c)(c^3+a) \geq 125abc$

5. Zij $a, b > 0$. Voor welke x is $f(x) = \dfrac{a+bx^4}{x^2}$ minimaal?

6. $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, m \in \mathbb{N} : \left(1+\dfrac{a}{b}\right)^m + \left(1+\dfrac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}$

7. (Nesbitt) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$

8. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, a+b+c = 1 : \sqrt{\dfrac{ab}{c}+1} + \sqrt{\dfrac{bc}{a}+1} + \sqrt{\dfrac{ca}{b}+1} \geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$

9. Zij $x_1, ..., x_{10} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ met $\sin^2(x_1) + ... + \sin^2(x_{10}) = 1$. Toon aan dat
$$\frac{\cos(x_1) + ... + \cos(x_{10})}{\sin(x_1) + ... + \sin(x_{10})} \geq 3.$$

10. Beschouw een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden a, b en schuine zijde c. Bewijs dat $a+b+2(c+\sqrt{2}) \geq 4\sqrt{a+b+c}$

Hoofdstuk 3

Orde-ongelijkheid

3.1 Sommen, producten en permutaties

Eerst voeren we enkele nieuwe symbolen in: $\sum_{k=1}^{n} a_k$ betekent: de som van a_k, startend van $k = 1$, tot en met n. Dus $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + ... + a_n$. Idem voor producten: $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot ... \cdot a_n$.

Voorbeeld. $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = 1 + 3 + 5 + ... + (2n+1) = (n+1)^2$

Voorbeeld. $\prod_{i=1}^{n} i^2 = \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^2 = (n!)^2$

In het begin is het vaak een goeie strategie om de sommen en producten gewoon uit te schrijven. Eens je er goed mee overweg kunt, ga je vaker het omgekeerde doen.

Nog een tweede belangrijke definitie is de volgende: we noemen een functie

$$\sigma : \{x_1, x_2, ..., x_n\} \to \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

een *permutatie* van $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ als en slechts als $\sigma(x)$ alle waarden exact 1 keer bereikt als alle $x \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ doorlopen worden. Dat impliceert dus ook dat ieder element op exact 1 ander element wordt afgebeeld en afkomstig is van exact 1 plaats. Het heeft dus zin om te spreken van $\sigma(x_2)$, of van het unieke getal q waarvoor $\sigma(x_q) = x_2$.

Voorbeeld. $(1, 2, 3, 4) \mapsto (1, 3, 4, 2)$ *is een permutatie, maar* $(1, 2, 3, 4) \mapsto (1, 2, 4, 2)$ *en* $(1, 2, 3, 4) \mapsto (2, 5, 1, 4)$ *niet. We zullen in het vervolg met* σ *steeds een permutatie aanduiden.*

3.2 Orde-ongelijkheid voor sommen

De orde-ongelijkheid is de wiskundige vertolking van het welgekende vraagstuk: als je 5 muntstukken van 1 soort mag nemen, 2 van een andere soort, en 1 van een derde soort, en er zijn muntstukken van 3 verschillende waarden aanwezig, hoe haal je dan er het meest/minst waarde uit?

De oplossing ligt voor de hand: zoveel mogelijk van de duurste soort, en afbouwen tot zo weinig mogelijk van de goedkoopste. Of als je zo weinig mogelijk wil: zoveel mogelijk van de goedkoopste en afbouwen tot zo weinig mogelijk van de duurste. Die truc wordt ook wel een 'greedy algorithm' genoemd: je kiest altijd voor wat het beste lijkt. Pas op, dat betekent niet altijd dat het ook het beste is! We bewijzen dus even dat dat hier wel het geval is.

Stelling. *(Orde-ongelijkheid) Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ en $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ dan geldt voor alle permutaties σ:*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_{\sigma(1)} + a_2b_{\sigma(2)} + \cdots + a_nb_{\sigma(n)} \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$$

$$\text{Ofte: } \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_ib_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} a_ib_{n+1-i}$$

Bewijs. *We gaan enkel de linkse ongelijkheid bewijzen, aangezien de rechtse volledig analoog is. Doe dit eventueel zelf eens als oefening. De stelling hierboven staat er nu voor 2 rijen $(a_i), (b_i)$, maar geldt evengoed voor $k > 2$ rijen. Het bewijs is volledig analoog, maar lastiger qua notatie.*

Deze bewijsmethode heet sequentieel bewijs. Voor $n = 2$ volgt de bewering logisch uit $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \geq 0$, en we gaan nu, dankzij deze ongelijkheid, koppeltjes 'wisselen' in ons middendeel, op zo'n manier dat we het tegelijk steeds vergroten, en in het linkerlid uitkomen. Dan impliceert dit dat het linkerlid groter moet zijn.

Noem nu q het unieke getal waarvoor $\sigma(q) = 1$. Dan hebben we $a_1b_r + a_qb_{\sigma(q)} = a_1b_r + a_qb_1$. Maar $a_1b_r + a_qb_1 \leq a_1b_1 + a_qb_r$ aangezien $a_1 \geq a_q$ en $b_1 \geq b_r$. Dus door die koppels om te wisselen groeit ons middendeel. Nu staat a_1 al bij b_1 op zijn plaats. Zo gaan we door voor $2, 3, ..., n$, en bekomen we wat we wilden. $\square$

Merk op dat de 'extreme' permutaties $(1, 2, ..., n) \mapsto (1, 2, ..., n)$ en $(1, 2, ..., n) \mapsto (n, ..., 2, 1)$ zelf ook permutaties zijn. In die gevallen treedt gelijkheid op in de respectieve ongelijkheden hierboven.

Merk echter op: aangezien de optelling commutatief is, is het niet eens nodig dat al die rijen echt stijgend zijn. Ze moeten gewoon 'gelijk gesorteerd' zijn, dus als je ze elk een volgnummer geeft van klein naar groot, is de som maximaal bij koppels van gelijke volgnummers en minimaal bij koppels van complementaire volgnummers.

Deze stelling heeft grote gevolgen, moeilijke problemen worden hiermee soms meteen triviaal.

Voorbeeld. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \dfrac{a+b+c}{abc} \leq \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

Oplossing. *We schrijven dit onder de vorm van*

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{a} \leq \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{c}$$

en bekomen de orde-ongelijkheid voor de getallen $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$. *Ongeacht wat grootst is,* $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ *en* $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ *zijn altijd gelijk gerangschikt, dus groter dan eender welke permutatie. Dus ook groter dan de permutatie* $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) \mapsto \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a}\right)$ □

Probleem opgelost, geen tijd aan spenderen. Het handig en snel kunnen werken met deze orde-ongelijkheid biedt vaak grote voordelen op wiskundewedstrijden zoals de IMO.

En op IMO durven ze wel degelijk zoiets vragen:

Voorbeeld. *(IMO 1975) Zij* $\forall x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}\, x_1 \leq ... \leq x_n, y_1 \leq ... \leq y_n$, *en* $(z_1, z_2, ..., z_n)$ *een permutatie van* $(y_1, y_2, ..., y_n)$*:*

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

Oplossing. *We zullen voor het gemak* z_i *schrijven als* $y_{\sigma(i)}$, *met* σ *de permutatie die* $(y_1, y_2, ..., y_n)$ *op* $(z_1, z_2, ..., z_n)$ *afbeeldt.*

De sommatie van een som is de som van de sommaties, dus schrijven we dit als:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)} + \sum_{i=1}^{n} y_{\sigma(i)}^2$$

We schrappen $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ *in beide leden, en uiteraard is ook* $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_{\sigma(i)}^2$ *aangezien sommeren over een permutatie niets uithaalt, aangezien de optelling commutatief is.*

Delen we wat overblijft door -2, dan keert het teken om, en staat daar letterlijk onze orde-ongelijkheid, x_i *stijgt,* y_i *stijgt, de conclusie volgt.* □

Dit was toen een zeer moeilijke vraag... blijkbaar was de orde-ongelijkheid nog niet gekend bij de studenten indertijd.

3.3 Orde-ongelijkheid voor producten

De vorige orde-ongelijkheid zegt bijvoorbeeld ook dat een vierkant van alle rechthoeken met oppervlakte A de kleinste omtrek heeft. Deze ongelijkheid zegt precies het aanvullende deel: dat van alle rechthoeken met omtrek L het vierkant de grootste oppervlakte heeft.

Stelling. *(Orde-ongelijkheid II) Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ en $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ dan geldt voor alle permutaties σ:*

$$(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n) \leq (a_1+b_{\sigma(1)})(a_2+b_{\sigma(2)})\cdots(a_n+b_{\sigma(n)}) \leq (a_1+b_n)(a_2+b_{n-1})\cdots(a_n+b_1)$$

$$\textit{Ofte: } \prod_{i=1}^{n} a_i + b_i \leq \prod_{i=1}^{n} a_i + b_{\sigma(i)} \leq \prod_{i=1}^{n} a_i + b_{n+1-i}$$

Bewijs. *Vrij analoog aan eerste orde-ongelijkheid. Bewijs zelf als oefening. En opnieuw geldt de stelling ook voor $k > 2$ rijen.*

Opnieuw, wegens de commutativiteit van de vermenigvuldiging, is het voldoende dat ze gelijk gesorteerd zijn. Dit 'omkeren' is een fenomeen dat wel vaker voorkomt: als je + en × verwisselt, geldt de ongelijkheid soms in de omgekeerde richting. Vaak is die ongelijkheid veel zwakker, tot nutteloos zelfs, maar hier levert het toch een ijzersterk resultaat op. Deze tweede orde-ongelijkheid ga je slechts in weinig cursussen vinden, maar ze is vaak onze enige uitweg voor moeilijke producten van sommen.

Voorbeeld. *$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}_0^+$:*

$$\left(a + \frac{1}{2^a}\right)\left(b + \frac{1}{2^b}\right)\left(c + \frac{1}{2^c}\right)\left(d + \frac{1}{2^d}\right) \geq \left(a + \frac{1}{2^b}\right)\left(b + \frac{1}{2^c}\right)\left(c + \frac{1}{2^d}\right)\left(d + \frac{1}{2^a}\right)$$

Oplossing. *De vorige stelling maakt dit triviaal: immers, ongeacht wat grootst/kleinst is, (a, b, c, d) en $(\frac{1}{2^a}, \frac{1}{2^b}, \frac{1}{2^c}, \frac{1}{2^d})$ staan altijd tegengesteld gesorteerd, dus het linkerlid is groter dan eender welke permutatie, dus ook groter dan het rechterlid.* □

Pas op, je mag *niet* veronderstellen dat $a \geq b \geq c \geq d$, dit is *niet* symmetrisch!

Probeer zoiets maar eens zonder orde-ongelijkheid! Of al meer in IMO-stijl:

Voorbeeld. *$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$:*

$$\left(\frac{bc + a}{1 + a}\right)\left(\frac{ca + b}{1 + b}\right)\left(\frac{ab + c}{1 + c}\right) \geq abc$$

Oplossing. *De koppels (a, b, c) en (bc, ac, ab) zijn altijd tegengesteld gesorteerd, waardoor het linkerlid in onderstaande ongelijkheid groter is dan het rechterlid:.*

$$(ab + c)(ac + b)(bc + a) \geq (a + ab)(b + bc)(c + ca) = abc(1 + a)(1 + b)(1 + c),$$

waarna deling door $(1 + a)(1 + b)(1 + c)$ het gevraagde geeft. □

3.4 Chebychev

Stelling. *(Chebychev) Zij* x_k *en* y_k *2 gelijk gesorteerde rijen,* $k = 1, .., n$*. Dan is*

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n} \leq \frac{x_1y_1 + x_2y_2 ... + x_ny_n}{n}$$

Bewijs. *Vermenigvuldigen we beide leden met* n^2 *en werken we uit, dan komt er weer: (vierkantnotatie)*

$$\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_1 & \cdots & x_1y_1 \\ x_2y_2 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_n & x_ny_n & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix}$$

Wat opnieuw gewoon neerkomt op een paar keer orde-ongelijkheid voor $n = 2$*, namelijk* $x_iy_i + x_jy_j \geq x_iy_j + x_jy_i$*.*

Deze stelling heeft de grote kracht dat ze een som van breuken kan opsplitsen in een product van de som van de tellers met de som van de noemers.

Voorbeeld. *(deel van IMO 1995)* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{z+x} + \dfrac{z^2}{x+y} \geq \dfrac{x+y+z}{2}$

Oplossing. *De koppels* (x, y, z) *en* $\left(\frac{1}{y+z}, \frac{1}{x+z}, \frac{1}{x+y}\right)$ *zijn altijd gelijk gesorteerd, dus leert Chebychev ons dat:*

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq 3 \cdot \frac{x^2+y^2+z^2}{3} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y}\right)$$

Via QM-AM weten we dat

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2$$

en via AM-HM weten we dat

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y}\right) \geq \frac{3}{2(x+y+z)}$$

Uitwerken geeft het gevraagde. □

3.5 Cycliciteit en symmetrie

Keren we nog eens terug op onze passen naar onze ongelijkheid van daarnet:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Je hebt misschien gemerkt dat er iets speciaals is aan die ongelijkheid. Als je 2 variabelen omwisselt, verandert de ongelijkheid niet, of verandert ze toch naar iets dat er volledig equivalent mee is. Zo'n ongelijkheid noemen we symmetrisch.

Symmetrie in ongelijkheden is een redelijk sterke eigenschap, zo kun je bijvoorbeeld de variabelen (hier (a, b, c)) voortdurend switchen om ze in stijgende volgorde te zetten, en toch dezelfde ongelijkheid behouden. Dat wil dus zeggen dat je bij zo'n ongelijkheden gewoon uit het niets mag 'veronderstellen' dat $a \geq b \geq c$, aangezien alle andere gevallen hier vanzelf uit volgen. Dat kan soms heel handig zijn, zoals bijvoorbeeld verderop bij het bewijs van de ongelijkheid van Schur.

Een ander analoog concept is het cyclisch zijn van ongelijkheden. Als je dezelfde (of een volledig equivalente) ongelijkheid krijgt als je de variabelen eentje doorschuift, bv. $(a, b, c, d) \mapsto (b, c, d, a)$ dan noemen we de ongelijkheid cyclisch. Analoog aan de redenering hierboven mag je de elementen doorschuiven totdat a de grootste is, en mag je dus opnieuw zomaar veronderstellen dat a de grootste variabele is. Of de kleinste, naargelang wat je best kan gebruiken in het probleem uiteraard. Maar uiteraard niet tegelijk een de grootste en een andere de kleinste, cycliciteit volgt uit symmetrie, maar niet omgekeerd.

Alle besluiten die je trekt omtrent cycliciteit of symmetrie moet je tot permutaties herleiden. Maar natuurlijk doe je deze bepaling meestal op het zicht, op een competitie is het voldoende te vermelden dat de ongelijkheid cyclisch of symmetrisch is.

Beide eigenschappen steunen onderliggend op permutaties, namelijk bij de symmetrische mogen we alle permutaties uitvoeren om een equivalente ongelijkheid te verkrijgen, bij cyclische een specifiek deel ervan. Goed inzicht hierin kan veel problemen al meteen uit de weg ruimen.

Als je met grotere machten gaat werken, of met meer dan 3 variabelen, kan het zootje soms wat onoverzichtelijk worden. Een handige notatie om dit te vermijden is alles in een rechthoek (T) te schrijven, zoals hieronder. In geval van de gewone orde-ongelijkheid sommeer je over de verschillende kolommen het product van de getallen in iedere kolom, en in geval van de orde-ongelijkheid voor producten neem je het product over de verschillende kolommen van de som van de getallen in iedere kolom.

$$\text{Voor sommen: } T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_3$$

$$\text{Voor product: } T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = (a_1 + b_1 + c_1)(a_2 + b_2 + c_2)(a_3 + b_3 + c_3)$$

Pas op, ga dit niet verwarren met de eerder gebruikte vierkantsnotatie, dit is iets totaal anders qua concept! Om het verschil duidelijk te maken ga ik hier rechthoekige haken gebruiken in plaats van ronde.

Voorbeeld. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + ab^2c + abc^2$

Oplossing. *Deze ongelijkheid is cyclisch, dus we zouden nu kunnen gaan opsplitsen: ofwel is $a \geq b \geq c$, ofwel is $c \geq b \geq a$. Echter, het kan nog korter: de koppels (a, b, c) en (bc, ca, ab) zijn altijd tegengesteld gesorteerd, waaruit we krijgen dat*

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ ab & bc & ac \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{bmatrix}.$$

□

Nog een prachtig staaltje van de kracht van onze orde-ongelijkheid:

Voorbeeld. *(IMO 1978) $\forall a_k \in \mathbb{N}_0\; k = 1, ..., n$ met alle a_k verschillend:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Oplossing. *We bewijzen eerst dat er een permutatie σ is waarvoor*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$$

Stel dat $\exists k : a_k \neq \{1, 2, ..., n\}$, dan is $a_k > n$, en bestaat er ook minstens 1 element $m \in \{1, 2, ..., n\}$ met $m \notin \{a_k\}$. Door $a_k = m$ te stellen verlaag je het linkerlid, daar $m \leq n$. Doe dit voor alle getallen, zo kom je tot een dergelijke permutatie.

Nu bewijzen we dat voor alle permutaties, dus ook voor de gevonden permutatie, geldt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Noteren we dit weer in rechthoek-notatie, dan krijgen we:

$$\begin{bmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n^2} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n^2} \end{bmatrix}$$

De onderste rij daalt, de bovenste stijgt in het rechterlid en niet in het linkerlid, dus het rechterlid is kleiner dan eender welke permutatie, dus ook kleiner dan het linkerlid. □

Geen minuut werk, en je krijgt anderhalf uur per vraag op IMO. Blijven oefenen, je kan hier echt leuke dingen mee doen!

Als afsluiter van dit hoofdstuk nog een laatste staaltje hoe deze ongelijkheid ook theoretische kanjers onderuit kan halen. Wat dacht je van een bijna triviaal bewijs van AM-GM? We hebben dat de rijen $(\sqrt[n]{a_1}, \sqrt[n]{a_2}, ..., \sqrt[n]{a_n})$ en $(\sqrt[n]{a_1}, \sqrt[n]{a_2}, ..., \sqrt[n]{a_n})$ gelijk gesorteerd zijn (uiteraard, ze zijn zelfs gelijk), dus we krijgen (opnieuw omdat alles in het linkerlid gelijk gesorteerd staat) dat:

$$\begin{bmatrix} \sqrt[n]{a_1} & \sqrt[n]{a_2} & \cdots & \sqrt[n]{a_n} \\ \sqrt[n]{a_1} & \sqrt[n]{a_2} & \cdots & \sqrt[n]{a_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt[n]{a_1} & \sqrt[n]{a_2} & \cdots & \sqrt[n]{a_n} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \sqrt[n]{a_1} & \sqrt[n]{a_2} & \cdots & \sqrt[n]{a_n} \\ \sqrt[n]{a_n} & \sqrt[n]{a_1} & \cdots & \sqrt[n]{a_{n-1}} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \sqrt[n]{a_2} & \sqrt[n]{a_3} & \cdots & \sqrt[n]{a_1} \end{bmatrix}$$

Daar $(\sqrt[n]{a_i})^n = a_i$ en $\sqrt[n]{a_1}\sqrt[n]{a_2}...\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ staat daar dus gewoon:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n \cdot \sqrt{a_1 a_2 .. a_n}.$$

$\square$

Zo simpel is dat.

3.6 Opwarmertjes

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$
2. algemener $(s = a_1 + \cdots + a_n)$: $\forall a_i \in \mathbb{R}_0^+ (1 \leq i \leq n) : \dfrac{a_1}{s - a_1} + \cdots + \dfrac{a_n}{s - a_n} \geq \dfrac{n}{n-1}$
3. Voor elke scherpe hoek x geldt: $\dfrac{\cos^3 x}{\sin x} + \dfrac{\sin^3 x}{\cos x} \geq 1$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}_0^+; m, n \in \mathbb{N} : x^m y^n + y^m x^n \leq x^{m+n} + y^{m+n}$
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 = 1 : -\dfrac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$
6. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \dfrac{a + b + c}{3}$
7. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, x^2 + y^2 + z^2 = 1 : x^2yz + xy^2z + xyz^2 \leq \dfrac{1}{3}$

3.7 Oefeningen

1. $\forall a_i \in \mathbb{R}_0^+ (1 \leq i \leq n), \prod_{i=1}^{n} a_i = 1 : \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$

2. (IMO 1997) Zij $(x_1, .., x_n)$ een rijtje reële getallen met $x_1 + ... + x_n = 1, |x_i| \leq \frac{n+1}{2}$. Je mag de elementen x_i in een willekeurige volgorde zetten, zodat je een nieuwe rij bekomt en deze noem je $(y_1, ..., y_n)$. Toon aan dat je steeds zo'n rij kan vinden zodanig dat $|y_1 + 2y_2 + ... + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}$.

3. (IMO 1964) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$

4. $\forall a_i \in \mathbb{R}_0^+ (1 \leq i \leq n) : \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} \geq \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$

5. $\forall a_i \in \mathbb{R} (1 \leq i \leq n), \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$: minimaliseer $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

6. $\forall a_i \in \mathbb{R}_0^+ (1 \leq i \leq n), \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$: maximaliseer $x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_nx_1$

7. Vind alle $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ die voldoen aan: $\forall a + b + c = 3, a^8 + b^8 + c^8 = 3$.

8. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, n \in \mathbb{N} : \frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^n$.

9. (USAMO 1997) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$

10. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{yz}{x(x+y+z)+1} + \frac{xz}{y(x+y+z)+1} + \frac{xy}{z(x+y+z)+1}$$

$$\geq \frac{x^2}{x(x+y+z)+1} + \frac{y^2}{y(x+y+z)+1} + \frac{z^2}{z(x+y+z)+1}$$

Hoofdstuk 4

De trukendoos: technieken

4.1 Substituties

Soms kunnen ongelijkheden er op zich erg moeilijk uitzien, maar met een klein beetje manipulatie sterk vereenvoudigd worden.

<u>**Voorbeeld**</u>. *(IMO 1995)* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, abc = 1 : \dfrac{1}{a^3(b+c)} + \dfrac{1}{b^3(c+a)} + \dfrac{1}{c^3(a+b)} \geq \dfrac{3}{2}$

Oplossing. *Niet meteen eenvoudig om hier iets mee aan te vangen. Doen we nu echter even de eenvoudige substitutie* $x = \dfrac{1}{a}, y = \dfrac{1}{b}, z = \dfrac{1}{c}$, *dan krijgen we na uitwerking het te bewijzen*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_0^+, xyz = 1 : \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

We hadden daarnet al dat dit minstens $\frac{x+y+z}{2}$ *was. AM-GM zegt ons bovendien dat*

$$\frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}$$

wat te bewijzen was. □

Nu moet je je altijd de vraag stellen: bewijs ik door de gesubstitueerde vorm te bewijzen ook het originele probleem? Ja, deze substitutie behoudt de ongelijkheid aangezien $\frac{1}{x}$ heel $\mathbb{R}_0^+$ doorloopt als x heel $\mathbb{R}_0^+$ doorloopt, dus dit is wel degelijk een juist bewijs. Vergeet niet dit steeds na te gaan voor je een nieuwe substitutie bedenkt! Je kunt bijvoorbeeld in de fout gaan als je iets moet bewijzen $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, en als je de substitutie $a = x^2$ doet en dan de bekomen ongelijkheid bewijst, dan heb je dit enkel bewezen voor positieve waarden van a, want x^2 doorloopt enkel de positieve waarden.

Wellicht de bekendste substitutie, al van in de tijd van de Oude Grieken, is die in verband met driehoekszijden. Veel competities geven hun ongelijkheden een extra smaakje door het gebruik van zijden van een driehoek. Als a, b, c zijden van een driehoek zijn, wil dat niets anders zeggen dan:

$$a < b + c$$
$$b < c + a$$
$$c < a + b$$

Teken nu zo'n driehoek. We weten uit de meetkunde dat het centrum van de ingeschreven cirkel het snijpunt van de bissectrices is. Tekenen we ook de 3 raakpunten van deze cirkel, dan krijgen we 3 paar congruente driehoeken, en lezen we dus af (zijden hebben positieve lengte) dat er positieve getallen x, y, z bestaan, namelijk de afstanden van een hoekpunt tot het dichtstbijzijnde raakpunt, waarvoor geldt:

$$a = x + y, b = y + z, c = z + x.$$

Als je ooit ergens driehoekszijden ziet, heb je veel kans dat je dit gaat nodig hebben. Een kort eenvoudig voorbeeldje:

Voorbeeld. $\forall a, b, c$ *driehoekszijden*: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca)$

Oplossing. *Dit kan zonder de substitutie: na wat sleutelen met de formuletjes zien we dat dit equivalent is met*

$$(a - b + c)(-a + b + c) + (-a + b + c)(a + b - c) + (a + b - c)(a - b + c) > 0,$$

een trivialiteit daar elk haakje afzonderlijk positief is. Uitwerken en vereenvoudigen geeft ons $2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2 > 0$. □

Dat is prima, maar heel moeilijk te vinden. Wie het zichzelf liever makkelijk maakt, kan ook gewoon de substitutie toepassen en uitrekenen, dat geeft dat het rechterlid gelijk is aan het linkerlid plus $4(xy + yz + zx)$, en dat laatste is positief. Zoals altijd met substituties: ze zijn niet strikt noodzakelijk, zoals hierboven geïllustreerd, maar ze kunnen het leven er wel stukken simpeler op maken.

Nog een heel leuke substitutie is deze: als de voorwaarde $abc = 1$ gegeven is, met $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$, dan kun je de volgende substitutie doorvoeren: $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$. Als (x, y, z) alle waarden in $\mathbb{R}_0^+$ doorlopen, doorlopen ook (a, b, c) alle waarden die voldoen aan $abc = 1$, en geen enkel punt waarvoor $abc \neq 1$. Dus deze substitutie behoudt de ongelijkheid én elimineert hierbij de voorwaarde! Deze handige substitutie mag je in de meeste gevallen blindelings toepassen als je die voorwaarde ziet. Maar pas op: ook niet altijd. Ze heeft namelijk het nadeel dat ongelijkheden die eerst symmetrisch zijn, hierdoor de symmetrie kunnen verliezen. Een andere substitutie, die ook de voorwaarde kwijt raakt en de symmetrie bewaart (maar dan wel weer zwaarder rekenwerk oplevert) is $a = \frac{x^2}{yz}, b = \frac{y^2}{zx}, c = \frac{z^2}{xy}$.

Voorbeeld. *Als $abc = 1$, vind de minimumwaarde van*

$$\left(\frac{1}{a+\frac{1}{b}+1}\right)^{2006} + \left(\frac{1}{b+\frac{1}{c}+1}\right)^{2006} + \left(\frac{1}{c+\frac{1}{a}+1}\right)^{2006}.$$

Oplossing. *Wegens Chebychev is dit groter of gelijk aan*

$$\frac{1}{3^{2005}}\left(\left(\frac{1}{a+\frac{1}{b}+1}\right) + \left(\frac{1}{b+\frac{1}{c}+1}\right) + \left(\frac{1}{c+\frac{1}{a}+1}\right)\right),$$

voeren we hierop de eerder genoemde substitutie uit, komt er:

$$\left(\frac{1}{a+\frac{1}{b}+1}\right) + \left(\frac{1}{b+\frac{1}{c}+1}\right) + \left(\frac{1}{c+\frac{1}{a}+1}\right) = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1,$$

en gelijkheid treedt op bij $a = b = c = 1$, dus de minimumwaarde is $\frac{1}{3^{2005}}$. □

Een ander merkwaardig extraatje die de driehoeken nog interessanter kan maken is dat je het type driehoek makkelijk kan uitdrukken aan de hand van de zijdelengtes: (a de langste zijde)

- Een driehoek is scherphoekig als en slechts als $a^2 < b^2 + c^2$.
- Een driehoek is rechthoekig als en slechts als $a^2 = b^2 + c^2$.
- Een driehoek is stomphoekig als en slechts als $a^2 > b^2 + c^2$.

Een iets merkwaardigere substitutie komt via een stelling uit de Euclidische meetkunde. In een driehoek met hoeken α, β, γ geldt dat

$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) \cdot \tan(\gamma).$$

Deze stelling is een zuiver meetkundige gelijkheid en heeft in se niets met de cursus te maken. Ik ga ze hier dan ook niet bewijzen, je mag ze gewoon voor waar aannemen.

Het typevoorbeeld dat je hierbij altijd zult zien staan is de conditie $a + b + c = abc$, waarin je die substitutie kunt toepassen. Deze substitutie is echter veel breder toepasbaar. Bijvoorbeeld de randvoorwaarde $xy + yz + zx = 1$ kan, na deling door xyz, herschreven worden als $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{xyz}$, wat op zijn beurt na substitutie $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ terug onze $a + b + c = abc$ geeft. Laat je dus niet vangen als ze die dingen een beetje onder een gecamoufleerde vorm geven. De randvoorwaarde $xy + yz + zx = 1$ komt veel meer voor. Het is dubbel oppassen geblazen trouwens, want bij sommige problemen ga je deze substitutie moeten gebruiken om er te komen, en bij andere ga je hopeloos verzeild raken in trigonometrisch rekenwerk.

De oefeningen op deze exotische substitutie zullen wel nog wat uitgesteld worden, tot we de nodige zaken gezien hebben om efficiënt met trigonometrie te werken.

4.2 Exponentiële en logaritmische functies

Het merkwaardige aan de substitutie bij de voorwaarde $a + b + c = abc$ is dat het een link geeft tussen product en som, die eigenlijk totaal uit de lucht komt vallen. Onder normale omstandigheden is er welgeteld 1 werkmiddel dat machten, producten en sommen onderling linkt, namelijk de exponentiële en logaritmische functies. Ik ga hier vrij kort overgaan, omdat het eigenlijk heel simpel is, dat ga je wel zien.

Neem de functie $f(x) = 2^x$. Die beeldt iedere $x \in \mathbb{R}$ af op een $y \in \mathbb{R}_0^+$. Bovendien is $f(a+b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = f(a)f(b)$. Dit is een merkwaardige eigenschap: de functiewaarde van een som is het product van de functiewaarden. Merk op dat $f(x) = 2^x$ heel $\mathbb{R}_0^+$ doorloopt terwijl x $\mathbb{R}$ doorloopt, en dat $f(x)$ ook strikt stijgend is. We noemen $f(x) = 2^x$ een *exponentiële functie*. Het getal 2 is daarbij niet specifiek, eender welk getal groter dan 1 heeft dezelfde eigenschappen.

De meest bekende exponentiële functie, die we in het vervolg 'de' exponentiële functie gaan noemen, is $\exp(x) = e^x$, waarbij $e \approx 2.7182$, een vreemd getal dat overal in de natuur voorkomt. Die heeft uiteraard ook alle eigenschappen van de functie hierboven. Waarom nu precies die e? Je moet hier niet veel achter zoeken. Voor alles wat wij er in deze cursus gaan mee doen, mag je zelfs redeneren op 2^x in de plaats, het zal geen verschil maken. Of op 10^x, zoals je wil.

Een klasse functies die nauw met de exponentiële functies verbonden zijn, zijn de logaritmische functies. Feitelijk doen die net het omgekeerde: de 2-logaritme van $x > 0$ is het unieke getal y waarvoor $2^y = x$. De 10-logaritme is dan weer het unieke getal y waarvoor $10^y = x$, en de 'gewone' logaritme, de e-logaritme het getal y waarvoor $e^y = x$. Die e-log noteren we ook $\ln(x)$. Analoog aan de exponentiële hebben we hier nu dus dat $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Twee andere eigenschappen die hieruit volgen: $\exp(rx) = \exp(x)^r$ en $r \ln(x) = \ln(x^r)$, en dit voor alle x waar de functie gedefinieerd is. Merk ook op dat beide functies strikt stijgend zijn. Dat wil zeggen: een ongelijkheid $A > B$ is volledig equivalent met $e^A > e^B$ of, voor $A, B > 0$, met $\ln(A) > \ln(B)$. En dat wordt natuurlijk interessant!

Een laatste eigenschap, die eigenlijk wel vrij logisch is: $e^{\ln(x)} = \ln(e^x) = x$, met andere woorden: deze 2 functies heffen mekaar op.

Voorbeeld. *(Canada 1995)* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$

Oplossing. *Nemen we de* ln *van beide zijden. Dan komt er te bewijzen:*

$$\ln(a^a b^b c^c) = a\ln(a) + b\ln(b) + c\ln(c) \geq \frac{a+b+c}{3}(\ln(a) + \ln(b) + \ln(c)) = \ln\left((abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\right).$$

Merk op dat door de stijgendheid van ln*, de rijen* (a, b, c) *en* $(\ln(a), \ln(b), \ln(c))$ *gelijk gesorteerd zijn. Chebychev toepassen geeft het gevraagde.* □

4.3 Homogeniseren en dehomogeniseren

Geen stelling opnieuw, wel een heel nuttige en interessante techniek om ingewikkelde dingen een stuk eenvoudiger te maken. Veel ongelijkheden, zoals deze:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

hebben de interessante eigenschap dat de totale graad van alle termen in beide leden gelijk is, hier bijvoorbeeld 0. We zeggen dat de ongelijkheid *homogeen* is. En als ze dat niet is, inhomogeen. Een interessante eigenschap van homogene functies: als je elk van de variabelen met een strikt positieve constante k vermenigvuldigt, kan de ongelijkheid niet in waarheid wijzigen. Dat is logisch, aangezien je alle k's voorop kunt zetten en wegdelen. We mogen dit dus naar hartelust doen.

Stel nu dat $a + b + c = S$. Als we alle variabelen vermenigvuldigen met $\frac{1}{S}$, krijgen we $a + b + c = 1$. Als we hiermee de waarheid kunnen bewijzen, hebben we ook waarheid van het oorspronkelijke probleem. Dat wil dus zeggen dat we bij zo'n homogeen problemen gewoon mogen beginnen met zelf te definiëren: "Stel zonder verlies van algemeenheid $a + b + c = 1$." Of beginnen: "Stel zonder verlies van algemeenheid $a = 1$." Of eender welke andere vooropstelling, die toelaat daaruit het oorspronkelijke probleem te bewijzen. Merk op dat we uiteraard slechts 1 dergelijke vooropstelling mogen maken, en dat je ze wel degelijk moet kunnen verkrijgen door de truc met S (je mag dus niet $a = 0$ stellen of zo).

Analoog kun je ook voorwaarden elimineren, door de (inhomogene) voorwaarde te gebruiken om te zorgen dat de graad in beide leden van de ongelijkheid in alle termen gelijk wordt. Eens je dat gedaan hebt mag je de voorwaarde gewoon vergeten, want een inhomogene voorwaarde op een homogene ongelijkheid heeft geen enkele betekenis. Pas wel op dat je je hiermee geen hoop rekenwerk op de hals haalt!

Voorbeeld. *(Iran 1998) Zij x_1, x_2, x_3, x_4 positieve reële getallen met $x_1x_2x_3x_4 = 1$, bewijs dan dat*

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq \sum_{i=1}^{4} x_i$$

Oplossing. *Homogeniseren we deze ongelijkheid, dan wordt ons te bewijzen:*

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq (x_1x_2x_3x_4)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{4} x_i$$

Wegens AM-GM weten we dat

$$\frac{x_1^3 + x_1^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3}{6} \geq (x_1x_2x_3x_4)^{\frac{1}{2}} x_1$$

Doen we nu hetzelfde voor x_2, x_3, x_4 en tellen we dit op, dan staat daar het gevraagde. □

4.4 Oefeningen

Je hebt nu voldoende bagage om aan de eerste reeks 'echte' oefeningen te beginnen.

No one has said it was easy.

1. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+$ driehoekszijden: $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$ zijn ook driehoekzijden

2. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+, a+b+c \leq 3 : \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{1}{3}$

3. $\forall x,y,z \in \mathbb{R}_0^+, \frac{1}{3} \leq xy+yz+zx \leq 3$: bepaal maximum en minimum voor xyz en $x+y+z$.

4. (deel van IMO 1991) $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+$ driehoekszijden: $\frac{1}{4} < \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \leq \frac{8}{27}$

5. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+$ driehoekszijden: $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geq 3$

6. (IMO 1964) $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+$ driehoekszijden:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

[hoewel de ongelijkheid evengoed geldt voor willekeurige $a,b,c \in \mathbb{R}_0^+$...]

7. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+$ driehoekszijden: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} < 2$

8. (IMO 2004) $\forall a_i \in \mathbb{R}_0^+ (1 \leq i \leq n)$: als voor elke drietal a_i, a_j, a_k met $1 \leq i < j < k \leq n$ geldt dat het de zijden van een driehoek zijn, bewijs dan dat

$$n^2+1 > (\sum_{i=1}^{n} a_i) \cdot (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}).$$

9. (Hojoo Lee) $\forall a,b,c$ driehoekszijden van een scherphoekige driehoek: $\sqrt{a^2+b^2-c^2}+\sqrt{b^2+c^2-a^2}+\sqrt{c^2+a^2-b^2} \leq a+b+c$

10. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+$ driehoekszijden: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b} > 2+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}$

11. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+$ driehoekszijden: $\left|\frac{a}{b}-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right| < 1$ en bewijs dat 1 niet door een kleinere constante vervangen kan worden.

12. (Korea 1998) $\forall a,b,c \in \mathbb{R}, a+b+c=abc : \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$

Hoofdstuk 5

De trukendoos: stellingen

Niet alle ongelijkheden zijn met voorgekookte formules en stellingen op te lossen, maar vaak kunnen deze wel een enorme hulp zijn. Hier overlopen we de meest gebruikte ongelijkheden. Eens je deze onder de knie hebt, kun je al een groot deel van alle ongelijkheden oplossen.

5.1 Cauchy-Schwarz

Stelling. *(Cauchy-Schwarz)* $\forall a_i, b_i \in \mathbb{R} : \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$

Bewijs. *Zie hoofdstuk 1. Gelijkheid treedt op als en slechts als* $a_i = k \cdot b_i$.

Deze stelling heeft de mysterieuze eigenschap dat ze bijna onoplosbare problemen als uit het niets tot een trivialiteit omtovert. Het is een krachtig werkmiddel, maar het vraagt wat oefening om het te leren hanteren. Soms wordt de naam van deze stelling ingekort tot Cauchy.

Voorbeeld. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, a^2 + b^2 + c^2 = 1$: *maximaliseer* $3a + 4b + 12c$.

Oplossing. *De bovenstaande stelling zegt ons dat* $(a^2 + b^2 + c^2)(3^2 + 4^2 + 12^2) \geq (3a + 4b + 12c)^2$ *dus dat* $3a + 4b + 12c \leq 13$ *met gelijkheid a.s.a* $a = \frac{3}{13}, b = \frac{4}{13}, c = \frac{12}{13}$ *(dus als elke variabele recht evenredig is met zijn coefficient). Het maximum is dus 13.* □

Nog iets straffer: je herinnert je deze harde noot misschien nog uit hoofdstuk 1.

Voorbeeld. *Zij* $a_1 + ... + a_n = 1$, *bewijs dat*

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + ... + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}.$$

Oplossing. *Merk op dat* $(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+...+(a_n+a_1)=2$. *Dus zegt Cauchy-Schwarz ons dat*

$$2\left(\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+...+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\right)\geq(a_1+a_2+...+a_n)^2=1,$$

delen door 2 geeft ons het gevraagde. Dat ging een heel stuk makkelijker, niet? $\square$

Je ziet het, dit is een zeer krachtige ongelijkheid, wellicht de belangrijkste uit dit hoofdstuk.

En om zijn titel helemaal verdiend te maken:

<u>**Voorbeeld**</u>. *(IMO 2005) Zij* $x,y,z\in\mathbb{R}_0^+$ *met* $xyz\geq 1$. *Toon aan dat*

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5}\geq 0.$$

Oplossing. *We herschrijven dit als*

$$3+\left(\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-1\right)+\left(\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}-1\right)+\left(\frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5}-1\right)\geq 0$$

uitwerken en $(x^2+y^2+z^2)$ *afzonderen geeft*

$$3\geq(x^2+y^2+z^2)\cdot\left(\frac{1}{x^5+y^2+z^2}+\frac{1}{x^2+y^5+z^2}+\frac{1}{x^2+y^2+z^5}\right),$$

of beter neergeschreven:

$$\frac{3}{x^2+y^2+z^2}\geq\frac{1}{x^5+y^2+z^2}+\frac{1}{x^2+y^5+z^2}+\frac{1}{x^2+y^2+z^5}.$$

Uit de Stelling van Cauchy-Schwarz volgt nu dat

$$\left(x^5+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{x}+y^2+z^2\right)\geq\left(x^2+y^2+z^2\right)^2,$$

maar aangezien $xyz\geq 1$ *ofte* $yz\geq\frac{1}{x}$, *volgt daar dus uit dat*

$$\left(x^5+y^2+z^2\right)\left(yz+y^2+z^2\right)\geq\left(x^2+y^2+z^2\right)^2.$$

Dus we hebben

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2}\leq\frac{yz+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\leq\frac{\frac{y^2+z^2}{2}+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}=\frac{\frac{3}{2}(y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

optellen voor x,y,z *geeft de gevraagde ongelijkheid.* $\square$

5.2 Algemeen machtsgemiddelde

We breiden de kennis over gemiddelden van het vorige hoofdstuk wat uit. We zien nu een overkoepelende theorie voor alle machtsgemiddelden. (Engels: Power-Mean)

We definiëren

$$f_j(a_1, \cdots, a_n) = \left(\frac{a_1^j + \cdots + a_n^j}{n} \right)^{1/j} = \sqrt[j]{\frac{a_1^j + \cdots + a_n^j}{n}}.$$

Ga na dat dit een gemiddelde is. In principe bestaat deze functie niet voor $f_0(), f_{+\infty}(), f_{-\infty}()$. Echter, via limietberekeningen kan men aantonen dat deze 'in de limiet' naderen naar iets dat we wel kennen, en wij zullen dus voor het gemak deze functies apart definiëren:

$$f_0(a_1, \cdots, a_n) = GM(a_1, \cdots, a_n),$$

$$f_{+\infty}(a_1, \cdots, a_n) = \max(a_1, \cdots, a_n),$$

$$f_{-\infty}(a_1, \cdots, a_n) = \min(a_1, \cdots, a_n).$$

Hierbij accepteren we $+\infty, -\infty$ dus eigenlijk als gewone getallen, dit is slechts een notatie, en we spreken daarbij dan logischerwijs af dat $+\infty > x > -\infty,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

En nu een grote stelling:

Stelling. *(Power-Mean ongelijkheid) Zij $i > j$, dan is*

$$f_i(a_1, \cdots, a_n) \geq f_j(a_1, \cdots, a_n)$$

met gelijkheid als en slechts als alle a_i gelijk zijn. Merk hierbij op dat de gekende gemiddelden speciale gevallen hiervan zijn:

$$\max = f_{+\infty}() \geq QM = f_2() \geq AM = f_1() \geq GM = f_0() \geq HM = f_{-1}() \geq \min = f_{-\infty}().$$

Bewijs. *Wordt gegeven in hoofdstuk over convexiteit, aangezien het hier toch maar uit de lucht zou komen vallen - terwijl het eigenlijk niet zo moeilijk is.*

Een voorbeeldje.

Voorbeeld. *Vind alle koppels (a, b, c) waarvoor $a + b + c = 3$ en $a^{2005} + b^{2005} + c^{2005} = 3$.*

Oplossing. *Power-Mean zegt dat*

$$\sqrt[2005]{\frac{a^{2005} + b^{2005} + c^{2005}}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

met gelijkheid als en slechts als $a = b = c$. Hier hebben we $1 \geq 1$, dus gelijkheid, dus alle variabelen gelijk: $a = b = c = 1$. $\square$

5.3 Twee veralgemeningen

De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz is een krachtig middel voor ongelijkheden met sommen van wortels, en dergelijk. Als we echter met derde wortels gaan werken, of met n-de machtswortels, zitten we vast. Gelukkig voor ons is er ook een kant en klare ongelijkheid die hiermee overweg kan: de (veralgemeende) ongelijkheid van Hölder.

Stelling. *(Veralgemeende Hölder) Zij $p_1, ..., p_k \in \mathbb{R}_0^+$, en nemen we k rijen van n getallen $\in \mathbb{R}_0^+$, met a_{ij} het j-de element van de i-de rij, en noteren we kort $s = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_k}\right)}$, dan geldt er:*

$$\prod_{i=1}^{k} \sqrt[p_i]{a_{i1}^{p_i} + ... + a_{in}^{p_i}} \geq \sqrt[s]{\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^s a_{2j}^s ... a_{kj}^s}.$$

Bewijs. *Het bewijs ga ik weglaten, aangezien de gebruikte technieken niet echt in het kader van de cursus passen, en het bewijs van deze veralgemeende versie ook vrij ingewikkeld en omvangrijk is. Gelijkheidsvoorwaarde is net als bij Cauchy-Schwarz: als en slechts als alle rijen een veelvoud van elkaar zijn.*

Dat is vrij algemeen, maar de stelling komt meestal gewoon voor met $p_1 = p_2 = ... = p_k = k$, vaak zelfs met $k = 3$.

Voorbeeld. $\forall n \in \mathbb{N}, a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}_0^+$:

$$(a_1^3 + ... + a_n^3)(b_1^3 + ... + b_n^3)(c_1^3 + ... + c_n^3) \geq (a_1 b_1 c_1 + ... + a_n b_n c_n)^3$$

Oplossing. *Volgt onmiddellijk uit Hölder. Dit lijkt al wat meer op Cauchy-Schwarz.* □

Voorbeeld. *(IMO Shortlist 2004) Zij $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ met $ab + bc + ca = 1$. Bewijs dat*

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}.$$

Oplossing. *Hölder op 3 variabelen geeft ons dat*

$$(linkerlid)^3 \leq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) ((6ab + 1) + (6bc + 1) + (6ca + 1)) (1 + 1 + 1).$$

Daar $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$ onder deze condities, is dat laatste gelijk aan $\frac{27}{abc}$, en rest ons dus te bewijzen dat $\sqrt[3]{\frac{27}{abc}} \leq \frac{1}{abc}$, wat je ondertussen wel zou moeten kunnen. □

Hölder is zeer handig als je wil bewijzen dat iets groter is dan een som van wortels. Voor kleiner dan een som van wortels kan de volgende stelling dan weer handig zijn.

Stelling. *(Veralgemeende Minkowski) Zij $p > r$, en nemen we k rijen van n getallen $\in \mathbb{R}_0^+$, met a_{ij} het j-de element van de i-de rij, dan geldt er:*

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{p}\right)^{r/p}\right)^{1/r} \geq \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{r}\right)^{p/r}\right)^{1/p}.$$

Bewijs. *Ook hier is het bewijs lang en niet echt relevant, ik ga het dus opnieuw weglaten. Gelijkheidsvoorwaarde ook hier dezelfde: als en slechts als alle rijen een veelvoud van elkaar zijn.*

Voorbeeld. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, a+b+c = 1 : \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{82}$

Oplossing. *Als je bij het zien van deze opgave spontaan probeert AM-GM toe te passen, en verwonderd bent dat maar $\geq \sqrt{18}$ garandeerd is, dan moet je hoofdstuk 2.3 nog eens opnieuw bekijken. Minkowski doet beter: passen we de stelling toe voor $p = 2, r = 1, n = 2, k = 3$, (en die waarden komen niet uit de lucht te vallen, je moet wat sleutelen om je uitdrukking daar in te doen 'passen') dan komt er hier:*

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}.$$

AM-HM zegt ons dat $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}$, dus is

$$\sqrt{(a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \left(\frac{9}{a+b+c}\right)^2} = \sqrt{82},$$

wat te bewijzen was. □

Vrij handig dus. Veel boeken geven minder krachtige varianten van deze stelling, die hun theoretisch belang hebben in de studie van genormeerde ruimten enzo in de analyse. Voor olympiades zijn deze echter niet voldoende, zeker wat betreft Hölder. Ik vermeld ze toch even ter volledigheid, je kunt zelf nagaan dat ze weldegelijk speciale gevallen zijn van de eerder vernoemde veralgemeningen.

Stelling. *(Hölder) Zij $p, q > 0$ met $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dan geldt:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q},$$

Stelling. *(Minkowski) Zij $p > 1 \in \mathbb{R}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, dan geldt:*

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p} \geq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} a_k^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} b_k^p}.$$

5.4 Schur

Stelling. *(Schur)* $\forall a, b, c, r > 0 : a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(b-a) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0$

Bewijs. *De ongelijkheid is symmetrisch, dus we mogen veronderstellen dat* $a \geq b \geq c$*. Schrijven we dit als*

$$(a-b)\left(a^r(a-c) - b^r(b-c)\right) + c^r(a-c)(b-c) \geq 0$$

dan zijn alle factoren en termen positief wegens de onderstelling $a \geq b \geq c$*.* □

Meer algemeen noemen we een functie $f(x)$ een Schur-functie, als en slechts als geldt:

$$\forall a, b, c > 0 : f(a)(a-b)(a-c) + f(b)(b-c)(b-a) + f(c)(c-a)(c-b) \geq 0$$

Uiteraard kun je $f(x) = x^r$ vervangen door eender welke positieve stijgende functie. Pas op: Schur is een krachtige stelling eens je ermee kunt werken, maar vergt wel wat rekenwerk en vooral reken-inzicht! Merk op dat hier wederom de orde-ongelijkheid opduikt. De onderstelling $a \geq b \geq c$ en de stijgendheid van f is gewoon een camouflage om te zeggen dat (a, b, c) en $(f(a), f(b), f(c))$ gelijk gesorteerd moeten zijn...

Voorbeeld. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$

Oplossing. *Dit is equivalent met Schur voor* $f(x) = x$*. Merk op dat we dit kunnen herschrijven als* $abc \geq (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$*, wat nog eens de link tussen Schur en de orde-ongelijkheid toont.* □

Voorbeeld. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : (a+b+c)(a^3+b^3+c^3+3abc) \geq 2(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)$

Oplossing. *Werk uit en je ziet dat dit equivalent is met Schur voor* $f(x) = x^2$*.* □

Voorbeeld. *(IMO 1984)* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, a+b+c = 1 : 0 \leq ab + bc + ca - 2abc \leq \frac{7}{27}$

Oplossing. *Het linkerdeel is vrij triviaal en ga ik niet op ingaan. Het rechterdeel gaan we homogeniseren, zodat we de vervelende voorwaarde* $a+b+c = 1$ *kwijt zijn. Alles maal 27 om ook breuken weg te krijgen geeft ons dus te bewijzen:*

$$7(a+b+c)^3 + 54abc \geq 27(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Stellen we nu $A = a^3+b^3+c^3, B = a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b, C = abc$ *en werken we gans dat boeltje uit (dat uitwerken moet je in je hoofd doen... dat is niet zo moeilijk als het er uitziet!), dan komt er* $7A + 21B + 42C + 54C \geq 27B + 81C$ *ofte* $7A + 15C \geq 6B$*. Schur zei ons daarnet dat* $A + 3C \geq B$*, en uit de orde-ongelijkheid weten we dat* $2A \geq B$*.*

Vijfmaal de $A + 3C \geq B$ en eenmaal $2A \geq B$ optellen geeft de te bewijzen ongelijkheid. $\square$

Je ziet, met wat slim rekenwerk kan je de kracht van Schur aanwenden om vanalles te kraken met relatief weinig rekenwerk. Je handen durven vuilmaken, dat moet je zeker wel kunnen. Onthoud ook best die korte notatie met A, B, C, die komt wel vaker van pas. Uiteraard bestaan er 'nettere' bewijzen, maar die zijn dan weer moeilijker om zelf te vinden. Juist is juist op een competitie, de methode die je het makkelijkst zelf vindt is dus per definitie de beste methode!

5.5 Bernouilli

Stelling. *(Bernouilli) Voor alle $x_i > -1$ en alle x_i hetzelfde teken, geldt:*

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Bewijs. *Inductie: triviaal voor $n = 1$, en er een variabele bijvoegen geeft:*

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1 + x_i) \geq (1 + x_{n+1})(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i) = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i + x_{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

en wegens alle x_i hetzelfde teken, is dat laatste niet negatief, dus bewezen. $\square$

Niet zo belangrijk. Vooral handig voor dingen als $(1.01)^{40} > 1.40$ in numerieke problemen.

5.6 Opwarmertjes

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$
2. $(a, b, c), (d, e, f) \in \mathbb{R}_0^+$ zijn de respectieve lengtes van de zijden van 2 gelijkvormige driehoeken als en slechts als $\sqrt{ad} + \sqrt{be} + \sqrt{cf} = \sqrt{(a + b + c)(d + e + f)}$
3. Minimaliseer $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ als $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ $(x \in [0, 1])$
4. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, a + b + c = 1 : \sqrt{4a + 1} + \sqrt{4b + 1} + \sqrt{4c + 1} \geq \sqrt{21}$
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, abc = 1 : a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$
6. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^+0 : (ac^2 + bd^2)^3 \leq (a^3 + b^3)(c^3 + d^3)^2$

5.7 Oefeningen

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geq \sqrt{6(x+y+z)}$

2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, m, n \in \mathbb{N}_0 : \dfrac{a}{mb+nc} + \dfrac{b}{mc+na} + \dfrac{c}{ma+nb} \geq \dfrac{3}{m+n}$

3. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, a+b+c < 1 : \sqrt{a^2 + \dfrac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \dfrac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \dfrac{1}{c^2}} > \sqrt{82}$

4. Zij $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ met $abc = 1$. Toon aan dat $a + b + c \leq a^3b + b^3c + c^3a$.

5. $\forall a_i, b_i \in \mathbb{R}_0^+ (1 \leq i \leq n), \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1$: minimaliseer $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_i^2}{a_i + b_i}$

6. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c \geq \dfrac{1}{4}, a+b+c = 1 : \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 5$

7. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_0^+, x+y+z = 1 : \dfrac{1}{\sqrt{1+xy}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+yz}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+zx}} \geq \dfrac{9}{\sqrt{10}}$

8. (IMO 1979) Bepaal alle $a \in \mathbb{R}_0^+$ waarvoor $\exists x_1, ..., x_5 \in \mathbb{R}$ zodat:
$$\sum_{i=1}^{5} x_i = a, \sum_{i=1}^{5} x_i^3 = a^2, \sum_{i=1}^{5} x_i^5 = a^3.$$

9. (Iran 1998) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2 : \sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$

10. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}_0^+ : \dfrac{a}{b+2c+3d} + \dfrac{b}{c+2d+3a} + \dfrac{c}{d+2a+3b} + \dfrac{d}{a+2b+3c} \geq \dfrac{2}{3}$

11. (IMO 1983) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ driehoekszijden : $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$

12. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \dfrac{a^{n+1}}{b+c} + \dfrac{b^{n+1}}{c+a} + \dfrac{c^{n+1}}{a+b} \geq \dfrac{a^n + b^n + c^n}{2}$

13. (IMO 1992) Noem V_x, V_y, V_z de loodrechte projecties van een ruimtelichaam V (met een eindig aantal punten) op de vlakken yz, zx, xy, en noteer $|A|$ het aantal elementen in A. Bewijs dat $|V|^2 \leq |V_x| \cdot |V_y| \cdot |V_z|$.

Hoofdstuk 6

Symmetrie

6.1 Sommen en producten

We voeren weer enkele nieuwe symbolen in, om de notaties te vereenvoudigen en aldus het rekenwerk drastisch in te perken. Je hebt al kennis gemaakt met de notatie $f(x)$, die eender welke functie van x aangeeft, bijvoorbeeld x^2, $\sqrt{x}-1$, enzovoort. Dit kunnen we makkelijk uitbreiden naar meerdere variabelen: we noemen bijvoorbeeld $f(a,b,c) = a+b-1$, als we daar iets mee moeten bewijzen. Merk op dat niet noodzakelijk alle variabelen moeten voorkomen, zelfs iets als $f(a,b,c) = \pi$ is een goeie functie.

Helemaal leuk wordt het natuurlijk als we over verschillende permutaties gaan sommeren of product nemen. Sommeren we de functie van daarnet, iets handiger neergeschreven als $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2^2 - 1$, over de permutaties $(1,3,2), (3,1,2), (3,2,1)$, dan komt er dus $(x_1 + x_3^2 - 1) + (x_3 + x_1^2 - 1) + (x_3 + x_2^2 - 1)$. Je ziet, we hadden hier x_1 en x_2, en gebruiken dus iedere keer het eerste en het tweede element uit de permutatie.

Nu de korte notaties. We noteren enerzijds $\sum_{cyc}^{n} f(x_1,...,x_n)$ de cyclische som van f, verkregen door f te sommeren over de n permutaties $(1,2,...,n), (2,3,...,n,1), ..., (n,1,...,n-1)$. Anderzijds noteren we $\sum_{sym}^{n} f(x_1,...,x_n)$ de symmetrische som, verkregen door f over alle $n!$ permutaties te sommeren. Beiden analoog voor producten.

<u>Voorbeeld</u>. $\sum_{cyc}^{3} x^2y = x^2y + y^2z + z^2x.$

<u>Voorbeeld</u>. $\prod_{cyc}^{4} (a^3 + bc) = (a^3 + bc)(b^3 + cd)(c^3 + da)(d^3 + ab).$

Voorbeeld. $\sum\limits_{sym}^{3} x = x + x + y + y + z + z = 2x + 2y + 2z$. *Vergeet die 2 niet!*

Voorbeeld. $\prod\limits_{sym}^{4} x = x.x.x.x.x.x.y.y.y.y.y.y.z.z.z.z.z.z.w.w.w.w.w.w = x^6y^6z^6w^6$. *Je ziet, symmetrische uitdrukkingen worden al snel groot als het aantal elementen toeneemt. Probeer zo'n dingen in je hoofd te tellen, zodat je geen uur moet schrijven bij een opgave als hieronder.*

Voorbeeld. *Ga zelf na:* $\sum\limits_{sym}^{2006} f(x_1) = 2005!\left(\sum\limits_{i=1}^{2006} f(x_i)\right) = 2005!\left(\sum\limits_{cyc}^{2006} f(x_1)\right)$.

Het is natuurlijk niet moeilijk om iedere uitdrukking in pakweg a, b, c te schrijven als $f(a, b, c)$. Echter, iedere cyclische uitdrukking kan je schrijven als een cyclische som. Meer nog, iedere symmetrische uitdrukking kan je schrijven als een symmetrische som! En omgekeerd, als we een cyclische som uitschrijven krijgen we een cyclische uitdrukking, en als we een symmetrische som uitschrijven krijgen we een symmetrische uitdrukking.

Naast cyclisch en symmetrisch sommeren zijn er nog een paar andere handige notatie-afspraken. Zo kun je bijvoorbeeld $x_1 + x_5 + x_7$ schrijven als $\sum\limits_{i\in\{1,5,7\}} x_i$. Of, iets compacter:

$$\sum_{i\in K} x_i \text{ met } K = \{1, 5, 7\}.$$

Dat is een veralgemening van de gewone sommatie:

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = \sum_{i\in K} x_i \text{ met } K = \{m, m+1, ..., n-1, n\}.$$

Deze notatie zal je hier niet veel tegenkomen, maar kan algemeen wel enorm handig zijn. Iets wat je hier meer zult zien is de volgende - eerder vergezochte, maar vaak voorkomende - notatie. We definiëren

$$\sum_{i\neq j} x_i x_j = (x_1 + ... + x_n)^2 - (x_1^2 + ... + x_n^2) = \frac{1}{(n-2)!}\sum_{sym} x_i x_j.$$

Formeel zou je dit dus kunnen neerschrijven als

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in K} x_i x_j\right), \text{ met } K = \{1, 2, ..., n\}\backslash\{i\}.$$

En analoog noteert men

$$\sum_{i<j}^{n} x_i x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} x_i x_j.$$

6.2 Muirhead

Eerst een nieuw begrip definiëren. We zeggen dat een niet-stijgend gesorteerd n-tal reële getallen $(a_1, a_2, ..., a_n)$ een ander niet-stijgend gesorteerd n-tal reële getallen $(b_1, b_2, ..., b_n)$ majoriseert, en noteren dit $(a_1, a_2, ..., a_n) \succ (b_1, b_2, ..., b_n)$ als en slechts als:

$$a_1 \geq b_1, a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2, ..., a_1 + a_2 + .. + a_{n-1} \geq b_1 + b_2 + .. + b_{n-1},$$

$$a_1 + ... + a_n = b_1 + ... + b_n.$$

Bijvoorbeeld $(6, 3, 1) \succ (4, 4, 2)$, of bijvoorbeeld $(4, 0, 0, -1) \succ (\frac{5}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2})$.

Stelling. *(Muirhead) Als $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \succ (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, en $x_i > 0$, dan geldt:*

$$\forall x_i \in \mathbb{R}^+ : \sum_{sym} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \geq \sum_{sym} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$$

Bewijs. *Wordt weggelaten wegens te lang en niet relevant in het kader van de cursus.*

Deze stelling lost doorgaans geen problemen op die de orde-ongelijkheid niet aankan. Toch is ze soms nuttig aangezien dit voor ingewikkeldere opgaven immens veel tijd kan besparen. Pas wel op dat je ze enkel toepast op symmetrische sommen, met Muirhead missen is meestal direct 0, want Muirhead is niet meteen een ongelijkheid die getuigt van grote kunde en creativiteit. Muirhead is sterk maar vraagt veel rekenwerk, en is daardoor vooral handig als laatste uitweg bij symmetrische ongelijkheden: als je het echt niet vindt op een andere manier, werk dan gewoon uit (compact genoteerd met de symmetrische sommen en producten) en hoop dat je ergens Muirhead/Schur/... kunt toepassen. Zo kon je bijvoorbeeld IMO2005/3 relatief eenvoudig oplossen door Muirhead 7 keer toe te passen als je het Cauchy-idee niet vond.

Dat heeft de IMO-jury ook wel een beetje verrast, en het lijkt vrij onwaarschijnlijk dat Muirhead nog echt van enig nut zal zijn de komende jaren. Ik zal mij dan ook beperken tot wat voorbeeldjes, zonder echte oefeningen. Er zijn nuttiger dingen te doen met je tijd.

Voorbeeld. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_0^+ : x^3y^3z + x^3yz^3 + xy^3z^3 \geq x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3$

Oplossing. *Zij $(a_i) = (3, 3, 1), (b_i) = (3, 2, 2), (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, dan geeft de stelling van Muirhead direct het resultaat, met een factor 2 voor (symmetrische som). Deel beide leden door 2 en je hebt wat je wil.* □

Voorbeeld. *(AM-GM) $\forall x_1, .., x_n \in \mathbb{R}_0^+ : x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$*

Oplossing. *Muirhead op $(1, 0, ..., 0) \succ (\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$. Opnieuw factor $(n-1)!$ wegdelen.* □

Voorbeeld. *Bewijs dat voor $a, b, c > 0 : (a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$.*

Oplossing. $(3, 1, 0) \succ (2, 2, 0)$ *en $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^4 + b^4 + c^4$ optellen.* □

Hoofdstuk 7

Convexe functies

7.1 Convexiteit

In dit hoofdstuk gaan we verder het pad op van de studie van ongelijkheden via functies. Dit hoofdstuk draait rond convexiteit, we definiëren dus eerst dit begrip. De volgende 4 beweringen zijn (althans voor deze cursus) equivalent:

- f is convex op [a,b]
- $\forall x, y, z \in [a, b]$ met $x \leq y \leq z$ geldt: $f(y)$ ligt nergens boven het lijnstuk tussen $(x, f(x))$ en $(z, f(z))$.
- $\forall x \in [a, b] : f''(x) \geq 0$
- $\forall w, x, y, z \in [a, b]$ met $w \leq x \leq y \leq z$ en $w + z = x + y$: $f(x) + f(y) \leq f(w) + f(z)$

Deze eigenschap met het ongelijkheidsteken omgekeerd definieert dan een concave functie. Opnieuw gelijkwaardig:

- f is concaaf op [a,b]
- $\forall x, y, z \in [a, b]$ met $x \leq y \leq z$ geldt: $f(y)$ ligt nergens onder het lijnstuk tussen $(x, f(x))$ en $(z, f(z))$.
- $\forall x \in [a, b] : f''(x) \leq 0$
- $\forall w, x, y, z \in [a, b]$ met $w \leq x \leq y \leq z$ en $w + z = x + y$: $f(x) + f(y) \geq f(w) + f(z)$

Het bewijs is lang en niet interessant. De intervallen mogen ook open/halfopen zijn.

Voorbeeld. *Vind alle functies die zowel convex als concaaf zijn.*

7.2 Stelling van Jensen

Voor wie nog geen afgeleiden kent, dit zal in praktisch alle gevallen voldoende zijn:

- In $\mathbb{R}_0^+$ geldt: $f(x) = x^k$ is convex voor $k \in \mathbb{R}\backslash]0,1[$, en concaaf voor $k \in [0,1]$.
- Voor negatieve x is x^k convex voor k even en concaaf voor k oneven.
- Zij f, g convex (resp. concaaf), dan is $f + g$ convex (resp. concaaf).
- Bovenstaande geldt *niet* voor product. Denk maar aan $f(x) = x, g(x) = x^{-1/2}$.
- $\sin(x)$ en $\cos(x)$ zijn convex waar ze ≤ 0 zijn, concaaf waar ze ≥ 0 zijn.
- $\tan(x)$ is convex waar ie ≥ 0 is, concaaf waar ie ≤ 0 is.
- De exponentiële functie is convex, de logaritmische is concaaf.
- Zij f convex (resp. concaaf) en $c \in \mathbb{R}^+$, dan is cf convex (resp. concaaf).
- Zij f convex (resp. concaaf) dan is $-f$ concaaf (resp. convex).
- Vaak kan je convexiteit of concaviteit zien door een schets van de functie te maken, of door ze via een kleine substitutie terug te brengen tot een gekende functie. Bijvoorbeeld $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ is convex op $]-1, +\infty[$ (en dus ook op $\mathbb{R}^+$), omdat $\dfrac{1}{x}$ convex is op $]0, +\infty[$.
- Je mag spiegelen tegenover de verticale as door het midden van je convexiteitsgebied: $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$ is convex op $[0,1]$ omdat $\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}$ dat is. Idem voor concaviteit.
- Dan nog twee 'speciale' gevallen die je niet direct uit de definitie ziet: $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ is convex voor $x > 0$ en $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$ voor $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

Stelling. *(Gewogen Jensen) Zij I een interval, $a_i \in I$, $k_i \in \mathbb{R}_0^+$, f convex op I. Dan is:*

$$\frac{k_1 \cdot f(a_1) + \cdots + k_n \cdot f(a_n)}{k_1 + \cdots + k_n} \geq f\left(\frac{k_1 a_1 + \cdots + k_n a_n}{k_1 + \cdots + k_n}\right)$$

Gelijkheid als en slechts als ofwel alle a_i gelijk zijn, ofwel de functie een rechte is. Ongelijkheidsteken in de omgekeerde zin als f concaaf is op I.

Bewijs. *Opnieuw is het bewijs van de gewogen versie lang en niet interessant.*

Ga steeds expliciet na dat je functie convex is, anders mis je gegarandeerd. Doorgaans zal $k_1 = ... = k_n = 1$. Probeer eventueel dit speciaal geval zelf via inductie te bewijzen.
Voor de volledigheid vermeld ik nog even - zonder bewijs - dat alle positieve convexe functies ook Schurfuncties zijn.

Veel van de vorige ongelijkheden zijn haast triviaal te bewijzen met behulp van deze stelling, zo is QM-AM bijvoorbeeld niets anders dan Jensen voor $f(x) = x^2$. Bovendien laat de gewogen versie van Jensen ons toe de ongelijkheden tussen de gemiddelden te veralgemenen, tot gewogen gemiddelden. Dit houdt in dat de waarden elk een gewicht krijgen, zoals men bijvoorbeeld op je rapport doet naargelang het aantal uur les van een vak. Het interessante is wel dat dit niet enkel geldt voor gehele en rationale coëfficiënten, maar voor alle reële.

Het enige addertje onder het gras - en ook de reden waarom deze stelling pas in dit hoofdstuk komt - is dat een probleem nooit duidelijk zal maken dat het met Jensen op te lossen is. Het komt er op aan zelf een geniale keuze van f te nemen waardoor Jensen het probleem eenvoudiger maakt. Alle hersencellen aan het werk dus! Enkele voorbeeldjes.

<u>Voorbeeld</u>. $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, a + b = 1 : \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Oplossing. *De functie* $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ *is convex in* $[0, 1]$, *we krijgen dus:*

$$f(a) + f(b) \geq 2 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{2}.$$

□

Of wat serieuzer:

<u>Voorbeeld</u>. *(IMO 2001)*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

Oplossing. *Graad is in alle termen van beide leden 0, we mogen dus zonder verlies van algemeenheid stellen dat* $a + b + c = 1$. *Stel* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, *deze functie is convex en dalend in* $\mathbb{R}^+$. *Jensen zegt ons dus:*

$$a \cdot f(a^2 + 8bc) + b \cdot f(b^2 + 8ca) + c \cdot f(c^2 + 8ab) \geq f(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc)$$

Nu hebben we ook, wegens AM-GM en f *dalend:*

$f(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc) \geq f(a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc)$.

Maar dat laatste is gelijk aan $= f((a + b + c)^3) = f(1) = 1$, *wat te bewijzen was.* □

Een bijna triviale oplossing voor een toch vrij recente IMO-vraag. De kracht van Jensen is groot, maar het vraagt enorm veel oefening om de juiste functie te leren 'zien'.

7.3 Trigonometrische ongelijkheden

Het vervelende aan trigonometrische problemen is dat het soms gebeurt dat de ongelijkheid zich afspeelt op een interval waar de functie op een stuk convex en op een ander stuk concaaf is. Een voorbeeldje.

Voorbeeld. *In elke driehoek met hoeken A, B, C geldt dat* $\cos(A) + \cos(B) + \cos(C) \leq \frac{3}{2}$.

Oplossing. *We weten dus niet of de driehoek scherphoekig of stomphoekig is en zitten dus schijnbaar vast met de convexiteit. Toch kan een kleine gevalstudie hier merkwaardige zaken verrichten. Noem C de grootste hoek.*

Als $C \leq 90°$, dan is $\cos$ concaaf en is wegens Jensen

$$\cos(A) + \cos(B) + \cos(C) \leq 3\cos\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \frac{3}{2}.$$

Als $C > 90°$, dan zijn $A, B < 90°$, dus krijgen we opnieuw via Jensen, maar nu op 2 variabelen, dat $\cos(A)+\cos(B)+\cos(C) \leq 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)+\cos(C)$. Daar $A+B = 2\left(\frac{A+B}{2}\right) < 90°$, krijgen we dat

$$2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) + \cos(C) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{A+B}{2}\right),$$

wat op zijn beurt gelijk is aan

$$-\left(\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) - 1\right)^2 + 1 + \sin^2\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq 1 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

□

De meeste meetkundigen zullen wel even gniffelen bij het zien van dit omslachtig bewijs, want er zijn veel eenvoudigere meetkundige oplossingen, maar die vallen buiten het bestek van deze cursus. We zullen hier dan ook niet dieper ingaan op de trigonometrische ongelijkheden in hun meetkundige betekenis.

Voorbeeld.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a + b + c = abc : \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Oplossing. *Doe de in hoofdstuk 4 vernoemde substitutie voor die voorwaarde. Daar* $\sqrt{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$, *is de ongelijkheid equivalent met*

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_0^+, \alpha + \beta + \gamma = \pi : \cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) \leq \frac{3}{2},$$

en dat hebben we daarnet al bewezen. □

7.4 Gewogen gemiddelden

Zoals beloofd herzien we nog even onze kennis over gemiddelden, en bewijzen enkele interessante veralgemeningen van de gekende stellingen hierover.

Stelling. *(gewogen AM-GM) Voor* $a_i, k_i \in \mathbb{R}_0^+$ *geldt:*

$$\frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n} \geq \sqrt[k_1+\ldots+k_n]{a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}}$$

Bewijs. *Beschouw de concave functie* $\ln(x)$. *Gewogen Jensen zegt nu dat*

$$\frac{k_1\ln(a_1) + \cdots + k_n\ln(a_n)}{k_1 + \cdots + k_n} \leq \ln\left(\frac{k_1a_1 + \cdots + k_na_n}{k_1 + \cdots + k_n}\right),$$

wat kan herschreven worden (zie rekenregels voor $\ln()$*) als:*

$$\ln\left(\sqrt[k_1+\ldots+k_n]{a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}}\right) \leq \ln\left(\frac{k_1a_1 + \cdots + k_na_n}{k_1 + \cdots + k_n}\right).$$

Exp() van beide leden nemen geeft het gevraagde. □

Stelling. *(gewogen QM-AM) Voor* $a_i, k_i \in \mathbb{R}_0^+$ *geldt:*

$$\sqrt{\frac{k_1a_1^2 + k_2a_2^2 + \cdots + k_na_n^2}{k_1 + \cdots + k_n}} \geq \frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}$$

Bewijs. *Gewogen Jensen op* $f(x) = x^2$ *geeft dat*

$$\frac{k_1a_1^2 + k_2a_2^2 + \cdots + k_na_n^2}{k_1 + \cdots + k_n} \geq \left(\frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}\right)^2,$$

hieruit de vierkantswortel trekken geeft het gevraagde. □

Stelling. *(gewogen GM-HM) Voor* $a_i, k_i \in \mathbb{R}_0^+$ *geldt:*

$$\sqrt[k_1+\ldots+k_n]{a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}} \geq \frac{k_1 + \cdots + k_n}{\frac{k_1}{a_1} + \frac{k_2}{a_2} + \cdots + \frac{k_n}{a_n}}$$

Bewijs. *Gewogen AM-GM op* $\frac{1}{a_i}$ *in plaats van* a_i. □

Je ziet, dit kost ons al heel wat minder moeite dan voorheen, en dat voor een meer algemene en krachtigere versie.

Hernemen we eventjes een oefening uit de oude doos, met de veralgemening dat m, n nu reëel mogen zijn:

Voorbeeld. $\forall a, b, m, n \in \mathbb{R}_0^+ : a^{\frac{m}{m+n}} \cdot b^{\frac{n}{m+n}} \leq \dfrac{am+bn}{m+n}$

Oplossing. *Bewijs zelf. (voor zover dit niet trivaal is ondertussen)*

Ook de veel algemenere Power-Mean kan zo verder veralgemeend worden, en je zult zien: altijd op dezelfde manier, je moet gewoon leren de goede functie te zien, en een beetje handigheid krijgen om stijgendheid/dalendheid van een functie erbij te betrekken.

Definiëren we opnieuw functies

$$f_j = \sqrt[j]{\frac{k_1 a_1^j + \cdots + k_n a_n^j}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}}$$

met nu f_0 het gewogen GM, en $f_{\pm\infty}$ gewoon minimum en maximum als voorheen.

Stelling. *(Gewogen Power-Mean Ongelijkheid) Als $i > j$ dan is:*

$$f_i(k_m, a_m) \geq f_j(k_m, a_m),$$

gelijkheid als en slechts als alle a_m gelijk zijn.

Bewijs. *Beschouw de functie $f(x) = x^{i/j}$. Deze is dus convex als $\frac{i}{j} > 1$, wat door $i > j$ equivalent is met $i > 0$. En concaaf als $i < 0$.*

Stel dat $i > 0$. Voeren we dan gewogen Jensen uit met wegingsfactoren k_m en argumenten $(a_m)^j$, dan komt er dat

$$\frac{k_1 a_1^i + k_2 a_2^i + \cdots + k_n a_n^i}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n} \geq \left(\frac{k_1 a_1^j + k_2 a_2^j + \cdots + k_n a_n^j}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n} \right)^{i/j},$$

uit beide leden de i-de wortel nemen behoudt de ongelijkheid voor $i > 0$, en geeft het gevraagde.

Als $i < 0$, volledig analoog, convexiteit keert het teken om, en i-de wortel nemen voor $i < 0$ keert het teken nogmaals om.

Als ten slotte $i = 0$ of $j = 0$, passen we gewoon GM-HM of AM-GM toe op (k_m, a_m^j) of op (k_m, a_m^i) respectievelijk. $\square$

Deze gewogen gemiddelden zijn slechts enkele van de vele dingen die heel makkelijk op te lossen zijn via Jensen. Kwestie van de kneepjes van het vak te leren: een dubbele portie oefeningen!

7.5 Oefeningen

Sommige oefeningen heb je al eens gemaakt zonder Jensen. Doe ze nu eens met, en beoordeel zelf het verschil.

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, abc = 1 : \sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \geq \frac{3}{2}$
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, a+b+c = 1 : \sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{b+c}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x|, |y| \leq 1 : \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$
4. $\forall n \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt[n]{n + \sqrt[n]{n}} + \sqrt[n]{n - \sqrt[n]{n}} \leq 2\sqrt[n]{n}$
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, a+b+c \leq \frac{3}{2} : \sum_{cyc} \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} > 9$
6. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, m, n \in \mathbb{N}_0 : \frac{a}{mb+nc} + \frac{b}{mc+na} + \frac{c}{ma+nb} \geq \frac{3}{m+n}$
7. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, ab+bc+ca = 1 : \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \geq \frac{3}{2}$
8. $\forall a_i \in \mathbb{R}_0^+, a_1 + ... + a_n = 1 : \frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + ... + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} > \frac{\sqrt{a_1} + ... + \sqrt{a_n}}{\sqrt{n-1}}$
9. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \sum_{cyc} \frac{a}{a+2b+c} \geq \frac{3}{4}$
10. $\forall a_i \in \mathbb{R}_0^+, a_1 + ... + a_n = 1 : \sum_{cyc} \frac{a_1^2}{a_1+a_2} \geq \frac{1}{2}$
11. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt[3]{b^3+c^3+6abc}} \geq \frac{3}{2}$
12. $\forall a, b, x, y \in \mathbb{R}_0^+, b > a : (x^a + y^a)^b \geq (x^b + y^b)^a$
13. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+, a, b, c \leq \frac{1}{2} : (\frac{1}{a} - 1)(\frac{1}{b} - 1)(\frac{1}{c} - 1) \geq (\frac{3}{a+b+c} - 1)^3$

14. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_0^+, x+y+z=1 : \dfrac{1}{\sqrt{1+xy}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+yz}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+zx}} \geq \dfrac{9}{\sqrt{10}}$

15. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}_0^+ : \sum_{cyc} \dfrac{a}{b+2c+3d} \geq \dfrac{2}{3}$

16. (IMO Shortlist 1990) $\forall w, x, y, z \in \mathbb{R}_0^+, wx+xy+yz+zw=1 : \sum_{cyc} \dfrac{w^3}{x+y+z} \geq \dfrac{1}{3}$

17. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1} \geq \sqrt{6(a+b+c)}$

18. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c \geq \dfrac{1}{4}, a+b+c=1 : \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 5$

19. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6}\right)^2 \leq \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{z^2}{6}$

20. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}_0^+, a^2+b^2+c^2+d^2=1 : (1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq abcd$

21. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \sum_{cyc} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+(b+c)^2}} \geq 1$

22. (Iran 1999) $\forall a_i \in \mathbb{R}_0^+; a_i < a_{i+1} : a_1a_2^4 + \cdots + a_{n-1}a_n^4 + a_na_1^4 \geq a_1^4a_2 + \cdots + a_{n-1}a_n^4 + a_na_1^4$

23. $\forall a_i \in \mathbb{R}, a_1 \geq 1 : \prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq \dfrac{2^n}{n+1} \cdot (1 + \sum_{i=1}^{n} a_i)$

24. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : \prod_{cyc}(a^2+2ab)^a \leq (a^2+b^2+c^2)^{a+b+c}$

25. $\forall a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{r_i+1} \geq \dfrac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \ldots r_n}+1}$

26. In een driehoek met hoeken A, B, C en (overstaande) zijden a, b, c geldt:

$$\sin(\frac{A}{2}).\sin(\frac{B}{2}).\sin(\frac{C}{2}) \leq \frac{abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

27. $\forall x \neq y \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt{xy} < \dfrac{x-y}{\ln x - \ln y} < \dfrac{x+y}{2}$

⋆ ⋆ ⋆

Typfouten en andere inhoudsopmerkingen zijn altijd welkom per mail.